

## Modèles mathématiques concernant les relations entre la charge individuelle et les indices de rendement chez la vigne

by

SAVKA DOBREVA

Plévène, Bulgarie

**R é s u m é :** Les données pour la production de raisin, ainsi que pour les indices de rendement obtenus pendant les années d'expérimentation avec le cépage Bouquet, contenant 4 échelles de charge individuelle (DOBREVA et STOEY 1991) ont été représentées par des modèles mathématiques descriptifs du type binal puissance-exponentiel:  $y = A \cdot x^b \cdot e^{cx}$  où:  $x$  = charge individuelle (nombre des yeux laissés à la taille);  $y$  = rendement par souche ou composantes de rendement (kg).

Les avantages de ce modèle descriptif sont: la même équation de régression est utilisée pour représenter tous les indices agrobiologiques de la vigne: les valeurs déterminées directement - rendement par souche (YV), nombre des yeux débouffés par souche (DE), nombre de rameaux par souche (SH), nombre de grappes par souche (CL) etc., ainsi que leurs relations - nombre des yeux débouffés d'un oeil laissé (DE/EV), nombre de rameaux d'un oeil débouffé (SH/DE), nombre de grappes d'un sarment (CL/SH), poids moyen d'une grappe (YV/CL) etc.

Grâce à l'applicabilité des équations comme ci-dessus, il est aussi possible d'utiliser le modèle fonctionnel polybinal (de type KLIMOV 1974):

$$U = A \cdot \prod_{i=1}^m x^{b_i} \cdot e^{c_i x}$$

pour représenter le rendement (U) comme un produit ( $\Pi$ ) des composantes, chacun d'eux étant une fonction  $y_i = y_i(x)$  de la charge individuelle de la vigne. Dans ce modèle les paramètres  $b$ ,  $c$  et  $A$  caractérisent le cépage, et leurs variations avec les années refléchissent l'influence des facteurs externes - les millésimes et les facteurs agrotechniques.

### Mathematical model concerning relationships between crop load and yield components of grapevine

**S u m m a r y :** Available data of grapevine yield and its components, obtained in 3-year experiments on cultivar Bouquet with 4 levels of individual pruning (DOBREVA AND STOEY 1991) were represented by descriptive mathematical model of a power-exponential type:  $y = A \cdot x^b \cdot e^{cx}$  where:  $x$  = pruning level (number of retained buds per vine);  $y$  = yield per vine resp. yield components (kg).

Such a descriptive model offers some advantages: The same type of regression was utilised to represent all agrobiological indices of the grapevine production: values which were measured directly like yield per vine (YV), number of developed buds per vine (DE), number of shoots per vine (SH), number of clusters per vine (CL); etc., and all their ratios like number of developed buds per retained node (DE/EV), number of shoots per developed buds (SH/DE), number of clusters per shoot (CL/SH), cluster weight (YV/CL), etc.

Due to the applicability of mentioned regressions, it will be also possible to compose a functional polybinary model (type of KLIMOV 1974):

$$U = A \cdot \prod_{i=1}^m x^{b_i} \cdot e^{c_i x}$$

Such a model will represent the yield (U) like a product ( $\Pi$ ) of many components from which each will be a function  $y_i = y_i(x)$  of a pruning level  $x$ .

In a model like this the parameters  $b$ ,  $c$  and  $A$  will characterise the cultivar; the year-to-year variation of these parameters will respond to the influence of the external factors - climatic conditions of the year and agrotechnical factors.

**K e y w o r d s :** pruning level, grape yield, yield components, power-exponential relationships, model.

Le nombre des yeux laissés à la taille est un facteur réglable qui détermine la quantité de production et, par conséquent, la qualité du raisin et la vigueur végétative de la vigne.

Dans la littérature spéciale la relation entre la charge (nombre des yeux laissés à la taille) et la production du raisin s'exprime par les différents modèles mathématiques: par les formules théoriques (p.e. la formule de MERJANIAN 1951) ou par les équations de régression obtenues par voie

expérimentale (régressions linéaires de SOLDATOV 1966; régressions du 2ème degré d'après STOEY 1973; régressions du 3ème degré de BÄDER 1981; régression hyperbolique de NIKOV 1986, 1987). Ce sont les modèles mathématiques nonlinéaires qui reflètent mieux les relations réelles entre la charge et les indices de la production chez la vigne.

La formule de MERJANIAN (1951) représente la production de raisin sous la forme d'une fonction linéaire de la charge individuelle de la vigne, mais ce modèle possède

une propriété très importante - il partage la relation considérée dans une succession de composantes de production. La formule de MERJANIAN (1951) représente la quantité de raisin par souche sous la forme d'un produit du nombre des yeux laissés à la taille, de la part relative des yeux débouffés, du nombre d'inflorescences par rameau, du poids moyen d'une grappe. Les trois derniers indices sont considérés in-correctement au sens des valeurs indépendantes de la charge.

Le premier but de la présente communication consiste à éclaircir la possibilité d'exprimer les relations entre le nombre des yeux laissés à la taille et les valeurs dépendantes de la charge par des modèles mathématiques du type binal puissance-exponentiel:

$$y = A \cdot x^b \cdot e^{cx}$$

La valeur indépendante  $x$  exprime le nombre d'yeux laissés par souche;  $y$  exprime les valeurs dépendantes de la charge individuelle: nombre des yeux débouffés, nombre de rameaux, nombre de rameaux fruitiers, nombre de grappes, production par souche, part relative des yeux débouffés, coefficient de fertilité etc.

Fig. 1 et Tab. 1 représentent, graphiquement et en paramètres, les équations de régression obtenues à partir des données moyennes des valeurs mesurées directement - nombre des yeux débouffés par souche (DE), nombre de rameaux par souche (SH), nombre de grappes par souche (CL), production de raisin par souche, kg (YV), aussi bien que des rapports correspondants - part relative des yeux débouffés (DE/EV), nombre de rameaux par oeil débouffé (SH/DE), grappes par sarment (CL/SH), poids moyen d'une grappe (YV/CL).

En examinant les courbes de régression (Fig. 1) et les paramètres des équations obtenues (Tab. 1) on pourra se persuader qu'un même type de modèle mathématique est applicable pour toutes les dépendances de la charge

individuelle. Ce sont les critères statistiques qui prouvent cette idée: le critère  $t$  signifiant les coefficients  $b$  des régressions linéaires et les coefficients de corrélation  $r$  entre les régressions obtenues et les données expérimentales.

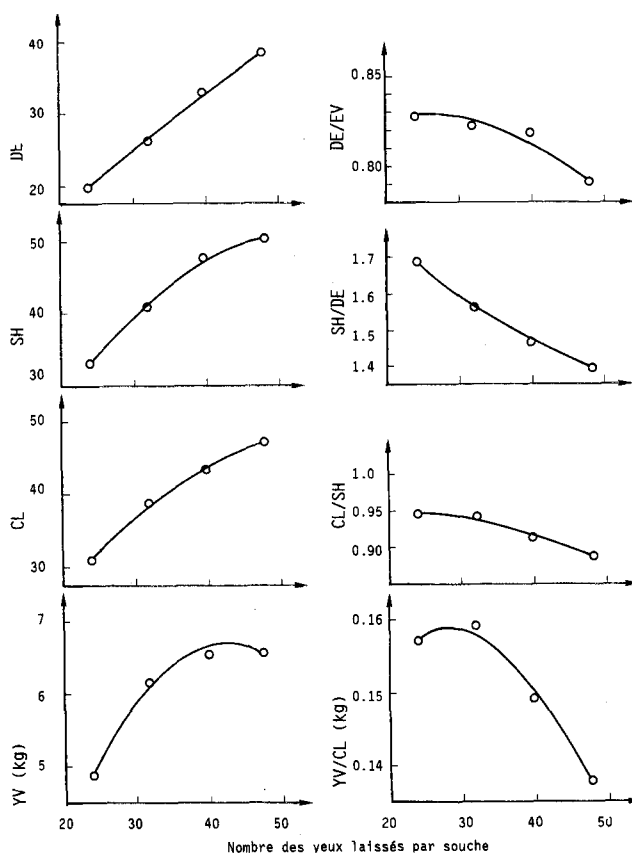


Fig. 1: Equations de régression, obtenues à partir des données moyennes pour 1981-83. YV, CL, SH, DE, EV: voir Tab. 1.

Regression lines for yield components, calculated from mean values 1981-83. YV, CL, SH, DE, EV: see Tab. 1.

Tableau 1

Dépendances de la charge individuelle chez la vigne. Paramètres de régressions  $y = Ax^b e^{cx}$ , obtenus à partir des données moyennes pour 1981-1983

Crop load per vine in dependence of yield components. Parameters A, b, c are calculated from mean values 1981-1983

Valeur dépendante $y$	Paramètres*			Critères statistiques	
	A	b	c	t-critère t	Coefficient de corrélation r
Nombre des yeux débouffés par souche (DE)	0,475	1,242	-0,009	132,430 ++	0,999
Nombre de rameaux par souche (SH)	1,766	0,994	-0,009	110,597 ++	0,999
Nombre de grappes par souche (CL)	0,761	1,326	-0,021	96,657 ++	0,999
Rendement de raisin par souche, kg (YV)	0,014	2,229	-0,052	110,019 ++	0,996
Nombre des yeux débouffés d'un oeil laissé (DE/EV <sup>+</sup> )	0,469	0,246	-0,009	21,517 +	0,950
Nombre de rameaux d'un oeil débouffé (SH/DE)	3,698	-0,244	-0,0006	32,671 +	0,999
Nombre de grappes d'un sarment (CL/SH)	0,527	0,261	-0,010	26,431 +	0,984
Poids moyen d'une grappe, kg (YV/CL)	0,019	0,912	-0,032	64,399 ++	0,994

\* Les paramètres A, b et c calculés d'après Chemical Handbook (1963)

<sup>+</sup>EV: nombre des yeux par souche

P = 1 % : 63,657

P = 5 % : 12,706

Le signe positif ou négatif des paramètres b et c (Tab. 1) témoignent que chez la plupart des régressions obtenues l'une des fonctions augmente parallèlement à la charge (fonction puissante ou fonction exponentielle) tandis que l'autre diminue avec l'augmentation de la charge.

Cette particularité des régressions obtenues (Tab. 1) correspond au sens biologique des dépendances de la charge

au point de vue des mécanismes d'autorégulation. Chez la vigne l'augmentation de la charge cause d'une part l'augmentation du nombre des yeux débourrés, des rameaux, des rameaux fruitiers etc., et d'autre part elle provoque la mise en action des mécanismes réduisant l'augmentation proportionnelle des valeurs dépendantes.

Les modèles mathématiques qui décrivent séparément

Tableau 2

Dépendances de la charge individuelle chez la vigne. Paramètres de régressions  $y = Ax^{be^x}$ , obtenues à partir des données pour chaque année. Pour DE, SH, CL, YV, DE/EV, SH/DE, CL/SH, YV/CL voir Tab. 1

Crop load per vine in dependence of yield components. Annual values of parameters A, b, c

Valeur dépendante y	Année	Paramètres			Critères statistiques	
		A	b	c	t	r
DE	1981	0,551	1,184	-0,006	48,721 +	0,999
	1982	0,312	1,428	-0,014	62,607 +	0,999
	1983	0,628	1,109	-0,006	37,068 +	0,998
SH	1981	0,509	1,389	-0,017	38,111 +	0,996
	1982	5,487	0,601	0,002	267,438 ++	0,999
	1983	1,402	1,117	-0,016	17,117 +	0,979
CL	1981	59,800	-0,454	0,032	3,127 -	0,948
	1982	0,044	2,522	-0,056	32,204 +	0,891
	1983	0,345	1,669	-0,038	40,093 +	0,982
YV	1981	0,436	0,913	-0,012	39,356 +	0,995
	1982	0,0002	3,954	-0,098	57,244 +	0,974
	1983	0,024	2,011	-0,055	29,568 +	0,903
DE/EV	1981(1)*	0,504	0,223	-0,008	13,296 +	0,874
	1981(2)	0,551	0,184	-0,006		0,802
	1982(1)	0,251	0,510	-0,017	20,313 +	0,848
	1982(2)	0,312	0,428	-0,014		0,795
	1983(1)	0,783	0,020	-0,003	0,758 -	0,811
	1983(2)	0,628	0,109	-0,006		0,608
SH/DE	1981(1)	0,826	0,250	-0,012	15,679 +	0,990
	1981(2)	0,924	0,205	-0,010		0,992
	1982(1)	40,280	-1,161	0,026	16,059 +	0,933
	1982(2)	17,590	-0,827	0,016		0,915
	1983(1)	2,320	-0,008	-0,010	0,241 -	0,985
	1983(2)	2,232	0,008	-0,011		0,984
CL/SH	1981(1)	8,778	-0,801	0,019	8,100 -	0,253
	1981(2)	117,500	-1,843	0,049		$r^2 < 0$
	1982(1)	0,053	1,124	-0,031	10,054 -	$r^2 < 0$
	1982(2)	0,008	1,921	-0,058		$r^2 < 0$
	1983(1)	0,245	0,553	-0,022	22,769 +	0,980
	1983(2)	0,246	0,552	-0,022		0,981
YV/CL	1981(1)	0,112	0,270	-0,013	3,335 -	0,777
	1981(2)	0,007	1,367	-0,044		0,250
	1982(1)	0,0006	2,230	-0,069	49,833 +	0,956
	1982(2)	0,004	1,433	-0,042		0,676
	1983(1)	0,070	0,344	-0,017	17,183 +	0,989
	1983(2)	0,071	0,342	-0,017		0,989

\* (1) - Equations de régression obtenues à partir des données expérimentales;  
(2) - Equations de régression obtenues en divisant des équations correspondantes du même tableau.

P = 1 % : 63,657  
P = 5 % : 12,706

les données expérimentales pour chacune des années sont représentées graphiquement sur Fig. 2 et leurs paramètres correspondants sur le Tab. 2.

La variation de masse de raisin, ainsi que le changement des paramètres b et c avec les années reflètent l'influence des conditions externes non contrôlées de l'année sur la production de la vigne. Comme on peut voir sur la Fig. 2, la diversité des données et des régressions obtenues concernent les valeurs absolues, aussi bien que le caractère des dépendances et la place du maximum.

En même temps que le rendement augmente sous l'influence de millésime on observe un déplacement du maximum dans le sens d'une plus haute charge - en 1983 le maximum de 4,57 kg est obtenu à 37 yeux par souche; en 1982 il est 7,48 kg et correspond à 40 yeux par souche; en 1981 le rendement maximal est 9,23 kg pour une charge à 77 yeux par souche.

En comparaison avec les régressions sur Fig. 1 et Tab. 1, celles du Tab. 2 étaient obtenues à partir d'une plus petite quantité du matériel expérimental. Certaines régressions sur Tab. 2 ne sont pas suffisamment convenables pour la description des dépendances examinées.

Le deuxième but de cet article consiste à montrer la possibilité de décrire la quantité de la production de raisin dans un modèle mathématique, en conservant la différenciation de relation dans une succession de composantes déjà établies (d'après le schéma de principe de MERJANIAN), mais aussi bien en comptant l'influence de la charge individuelle sur les indices de rendement.

Les propriétés de la fonction puissance-exponentielle permettent la multiplication et la division des expressions mathématiques.

Les régressions des indices-rapports (Tab. 2) ont été obtenues de deux façon suivantes - à partir des données expérimentales pour chaque indice-rapport et à la base de la division des deux équations décrivant les indices respectifs. Les paramètres b et c, évalués d'après les façons en question, sont assez proches.

La formule de MERJANIAN (1955) représente un produit (II) des quelques coefficients  $y_i$ :

$$U = \prod_{i=1}^m y_i$$

où: U - est la production de raisin, en kg; m - est le nombre de composantes de la production.

Les expressions puissance-exponentielles multipliables, le schéma de MERJANIAN pourrait être transformé dans un produit des fonctions  $y_i(x)$ :

$$U = \prod_{i=1}^m y_i(x)$$

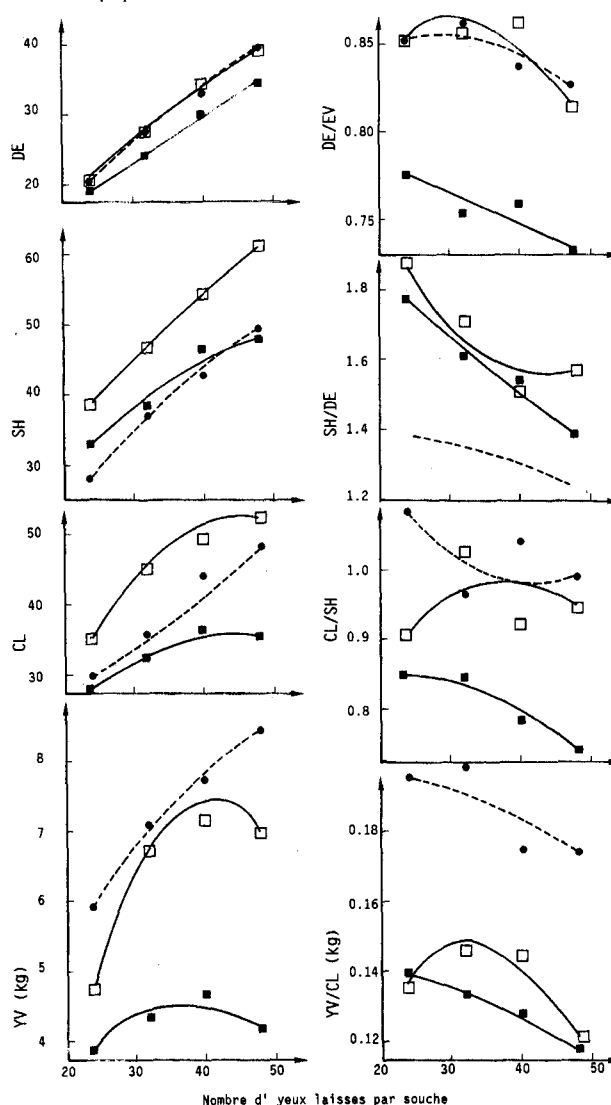


Fig. 2: Equations de régression pour chacune des années: ● 1981; □ 1982; ■ 1983. YV, CL, SH, DE, EV: voir Tab. 1. Regression lines for yield components of 1981 (●), 1982 (□), 1983 (■). YV, CL, SH, DE, EV: see Tab. 1.

Tableau 3

Equations de régression pour la production de raisins (U), obtenues en multipliant les équations pour chaque des 5 composantes de rendement (EV, DE/EV, SH/DE, CL/SH, YV/CL - voir Tab. 1)

Regression equations of grape yield (U) established from the yield components

Valeur dépendante	Année	Paramètres			Coefficient de corrélation
		A	b	c	
$U = A \cdot \prod_{i=1}^m x^{b_i} \cdot e^{c_i x}$		A	b	c	r
Rendement de raisins par souche, kg	1981	0,409	0,942	-0,013	0,996
	1982	0,0003	3,703	-0,091	0,970
	1983	0,031	1,909	-0,051	0,900

Cette idée et les expressions mathématique fixées ci-dessus conduisent jusqu'au modèle fonctionnel polybinal de KLIMOV (1974):

$$U = A \cdot \prod_{i=1}^m x^{b_i} \cdot e^{c_i x}$$

D'après le schéma de MERJANIAN, mais dans la formule la plus complète (DOBREVA et CHRISTOVA 1990), le modèle fonctionnel polybinal ne contiendra plus que 7 composantes ( $m \leq 7$ ). Dans la présente communication nous avons utilisé un des schémas de 5 composantes ( $m = 5$ ) - EV, DE/EV, SH/DE, CL/SH et YV/CL. La première composante de production de raisin, c'est à dire la charge individuelle, se représente sous la forme de puissance binaire-exponentiel, avec des paramètres  $b = 1$ ,  $c = 0$  et  $A = 1$ .

Sur Tab. 3 on peut voir les paramètres de régressions obtenus en multipliant les régressions pour chacune des 5 composantes de rendement dans Tab.

[2] La comparaison des couples des régressions de rendement pour une même année (Tab. 2 et 3) montre l'applicabilité des expressions mathématiques ainsi obtenues.

En conclusion, nous voudrions exprimer l'opinion, que le modèle fonctionnel polybinal donne une possibilité de composer un modèle complet du rendement de la vigne ayant pour base le système des indices agrobiologiques acceptés depuis longtemps.

Dans ce modèle la valeur indépendante  $x$  sera le facteur contrôlable par le viticulteur, les relations entre les indices agrobiologiques d'un cépage et la charge individuelle seront présentées par les paramètres  $b$ ,  $c$  et  $A$ , et l'influence des facteurs externes, naturels et agrotechniques, seront réfléchis par variation des paramètres.

## Références bibliographiques

- BÄDER, G.; 1981: Zur Methode der Untersuchung der Beziehung zwischen Menge und Güte des Ertrages in Abhängigkeit vom Anschnitt. Wein-Wiss. **36**, 378-394.
- DOBREVA, S.; CHRISTOVA, P.; 1990: Relation between the yield and its elements with grapevine. Rast. Nauk. **27** (9), 79-84.
- DOBREVA, S.; STOEV, K.; 1991: Effect of individual loading of the grapevine cultivars Buket, Cabernet Sauvignon and Merlot on yield and its elements. Rast. Nauk. **28** (3-6), 95-100.
- KLIMOV, A. A.; 1974: . Functional modelling of agricultural crops. Selskostop. Nauk. **13** (2) 21-39. [Russ.].
- MERJANIAN, A. S.; 1951: Viticulture. Moscow. [Russ.].
- NIKOLSKII, B. P. (Ed.); 1963: Chemical Handbook. Vol. 1. Leningrad, Moscow. [Russ.].
- NIKOV, M.; 1986: Effect of loading on growth and fruit bearing of grapevine cv. Merlot. Rast. Nauk. **23** (11), 106-112.
- NIKOV, M.; 1987: Influence de la charge sur la production et la croissance de la vigne (cv. Merlot). Conn. Vigne Vin **21**, 81-91.
- SOLDATOV, P. K.; 1966: Vine loading and grape yield. Vinodel. Vinogradar. SSSR (4), 15-20.
- STOEV, K.; 1973: Bases Physiologiques de la Viticulture, vol. II. Sofia. [Russ.].

Reçu le 31 Janvier 1994